Chapitre 25 : Probabilités

Table des matières

1 Vocabulaire relatif aux événements **2**

2 Espaces probabilisés finis **3**
2.1 Définition et propriétés d'une loi de probabilités 3
2.2 Comment déterminer de manière simple une loi de probabilité ? 3

3 Probabilités conditionnelles **4**
3.1 Définition et propriétés des probabilités conditionnelles 4
3.2 Probabilités composées 5
3.3 Formule des probabilités totales 6
3.4 Formule de Bayes 6

4 Événements indépendants **6**
4.1 Indépendance de deux événements 6
4.2 Indépendance d'un nombre fini d'événements 7

5 Urnes et tirages **8**

1 Vocabulaire relatif aux événements

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prédire avec certitude le résultat.
On appelle **univers** (généralement noté Ω) l'ensemble de tous les **résultats possibles** (ou **issues**, ou **réalisations**) d'une expérience aléatoire.

Exemple 1.1 :

- On lance un dé à 6 faces et on note le nombre obtenu. Il y a 6 issues possibles et $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- On choisit au hasard un nombre entre 1 et 100. Il y a 100 issues possibles et $\Omega = [\![1; 100]\!]$.

Définition 1.2 (vocabulaire probabiliste relativement à un univers fini)

On appelle univers fini un ensemble fini non vide.
Une fois que l'on a fixé un univers fini Ω, on appelle :

- résultats, issues ou réalisations : les éléments de Ω
- événement : une partie de Ω
- événement élémentaire : un singleton de Ω (événement constitué d'une seule issue)
- événement impossible : $\emptyset$
- événement certain : Ω

On peut définir un événement soit en donnant la liste de toutes les issues qu'il contient (dites issues favorables), soit en donnant une propriété qui le caractérise.
Par exemple, lors du lancer d'un dé, l'événement « obtenir un résultat pair » correspond à l'ensemble $\{2\,;4\,;6\}$.

Définition 1.3 (opérations sur les événements)

Soit Ω un univers fini et soient A et B des événements de Ω (c'est-à-dire des parties de Ω).
On définit les événements suivants :

- l'événement contraire de A : $\overline{A} = \Omega \backslash A$
- l'événement « A et B » : $A \cap B$
- l'événement « A ou B » : $A \cup B$

Les événements A et B sont dits incompatibles lorsque l'événement « A et B » est impossible, ce qui signifie que les parties A et B sont disjointes (*i.e.* $A \cap B = \emptyset$).

Remarque : Pour tout événement A de Ω, les évènements A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

Définition 1.4 (système complet d'événements)

On appelle système complet d'événements une famille finie d'événements deux à deux disjoints dont la réunion est égale à l'univers.

L'intérêt d'un système complet d'événements est de pouvoir faire une disjonction de cas.

Exemples 1.5 : Soit Ω un univers fini.

1. Pour tout événement A de Ω, la famille $(A\,,\overline{A})$ est un système complet d'événements.
2. Si $\Omega = \{\omega_1\,;\ldots;\omega_n\}$, la famille $(\{\omega_i\})_{1\leqslant i\leqslant n}$ (famille constituée des événements élémentaires) est un système complet d'événements.

2 Espaces probabilisés finis

2.1 Définition et propriétés d'une loi de probabilités

Définition 2.1 (loi de probabilité sur un univers fini)

Soit Ω un univers fini.
Une loi de probabilité (ou plus simplement *probabilité*) sur Ω est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. *probabilité de l'événement certain :* $P(\Omega) = 1$;
2. *additivité :* si A et B sont deux événements incompatibles (*i.e.* deux parties disjointes de Ω), alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

On dit alors que le couple $(\Omega\,, P)$ est un espace probabilisé fini.

Vocabulaire : Pour tout événement A de Ω, le nombre $P(A)$ est appelé probabilité de l'événement A.

Proposition 2.2 (propriétés d'une loi de probabilité)

Soit $(\Omega\,, P)$ un espace probabilisé fini. On a les propriétés suivantes :

1. *probabilité de l'événement impossible :* $P(\emptyset) = 0$.
2. *probabilité de l'événement contraire :* Pour tout événement A de Ω, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
3. *croissance :* Pour tous événements A et B de Ω tels que $A \subset B$, $P(A) \leqslant P(B)$.
4. *probabilité d'une différence :* Pour tous événements A et B de Ω, $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.
5. *probabilité d'une union :* Pour tous événements A et B de Ω, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6. Si $(A_1\,, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements de Ω, alors $P(A_1) + \cdots + P(A_n) = 1$.

2.2 Comment déterminer de manière simple une loi de probabilité ?

Définition 2.3 (distribution de probabilités)

Soit E un ensemble fini.
Une distribution de probabilités sur E est une famille $(p_i)_{i \in E}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\sum_{i \in E} p_i = 1$.

Exemple 2.4 : Intuitivement, on décrit parfaitement un lancer de dé en donnant la probabilité de chacun des événements élémentaires. Ces données forment une distribution de probabilité $(p_1, \ldots, p_6)$ sur $\Omega = [\![1;6]\!]$. Celle-ci détermine totalement la loi de probabilité. Par exemple, la probabilité de l'événement A : « obtenir un résultat pair » se calcule de la manière suivante : $P(A) = P(\{2\,;4\,;6\}) = p_2 + p_4 + p_6$.
Le résultat qui suit généralise cette situation :

Proposition 2.5 (détermination d'une loi de probabilité par une distribution de probabilités)

Soit Ω un univers fini et soit $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une distribution de probabilités sur Ω.
Il existe alors une unique loi de probabilité P sur Ω telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $P(\{\omega\}) = p_\omega$.
De plus, pour tout événement A de Ω, $P(A) = \displaystyle\sum_{\omega \in A} p_\omega$.

Remarque : faire la distinction entre le résultat ω (élément de Ω) et l'événement élémentaire $\{\omega\}$ (partie de Ω).

Cas particulier : probabilité uniforme

Exemple 2.6 : On reprend l'exemple d'un lancer de dé. Si le dé est équilibré, on décrit aussi parfaitement la situation par le fait que l'on a la même probabilité d'obtenir chacune des six faces, c'est-à-dire que les éléments composant la distribution de probabilités sont égaux à $\frac{1}{6}$ (car leur somme doit être égale à 1).
On dit ici que l'on a **équiprobabilité**, ou encore que la loi de probabilité P est **uniforme**.

Définition 2.7 (loi de probabilité uniforme)

Soit Ω un univers fini.
La distribution de probabilités sur Ω dont tous les éléments sont égaux est $\left(\frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}\right)$.
Celle-ci détermine une loi de probabilité P qui est appelée loi de probabilité uniforme sur Ω, et on a :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

On parle d'équiprobabilité lorsque l'univers est muni de cette loi de probabilité uniforme.

Remarque : De nombreuses modélisations d'expériences aléatoires se ramènent à des situations d'équiprobabilité sur un univers Ω bien choisi. Le calcul de probabilités se ramène alors à du dénombrement.

Exemple 2.8 :
On lance deux dés équilibrés, et on cherche à calculer la probabilité que la somme des deux dés soit égale à 7.
On modélise l'univers par l'ensemble $\Omega = [\![1\,;6]\!]^2$ des couples de chiffres possibles sur chaque dé.
On a équiprobabilité sur Ω, et $|\Omega| = 6^2 = 36$.
L'événement A : « obtenir 7 » correspond à l'ensemble des couples $\{(1{,}6)\,;(2{,}5)\,;(3{,}4)\,;(4{,}3)\,;(5{,}2)\,;(6{,}1)\}$, donc $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
En revanche, on n'a pas équiprobabilité sur l'ensemble $[\![2\,;12]\!]$ des sommes possibles ; en effet, $P(A) \neq \frac{1}{11}$. Il n'aurait donc ici pas été pertinent de choisir $\Omega = [\![2\,;12]\!]$.

3 Probabilités conditionnelles

3.1 Définition et propriétés des probabilités conditionnelles

Définition 3.1 (probabilité conditionnelle de A sachant B)

Soit $(\Omega\,, P)$ un espace probabilisé fini et soient A et B deux événements de Ω.
On suppose que $P(B) > 0$.
La probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $P_B(A)$ ou $P(A|B)$, est définie par :

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarque : Malgré ce que laisserait supposer la notation $P(A|B)$, $A|B$ n'est pas un événement.

Proposition 3.2 (l'application P_B est une loi de probabilité)

Soit $(\Omega\,, P)$ un espace probabilisé fini et soit B un événement de Ω tel que $P(B) > 0$.
L'application $P_B : \mathcal{P}(\Omega) \to [0\,;1]$ est une loi de probabilité sur Ω.

Remarque : Par conséquent, les probabilités conditionnelles possèdent les mêmes propriétés que les probabilités (additivité finie, croissance, probabilité d'un événement certain ou impossible, probabilité de l'événement contraire, probabilité d'une union, somme des probabilités d'un système complet d'événements).

Comme on l'a vu sur l'exemple du lancer de dé, les probabilités conditionnelles se calculent simplement lorsqu'on est dans une situation d'équiprobabilité :

Proposition 3.3 (expression des probabilités conditionnelles losqu'on a équiprobabilité)

Soit Ω un univers fini et soit P la probabilité uniforme sur Ω.
Pour tous événements A et B de Ω tels que $B \neq \emptyset$:

$$P(A|B) = \frac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(B)} = \frac{\text{nombre de cas favorables à « } A \text{ et } B \text{ »}}{\text{nombre de cas favorables à } B}$$

Exemple 3.4 : On s'intéresse à une famille de deux enfants avec une équiprobabilité pour le sexe des enfants.

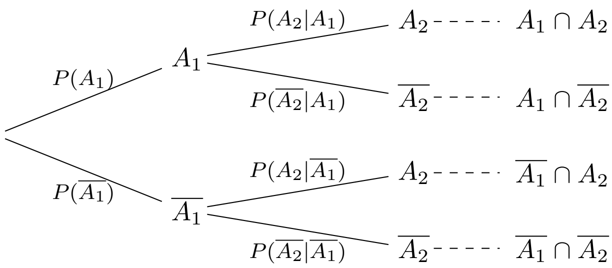
1. Quelle est la probabilité d'avoir deux filles ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir deux filles sachant que l'aîné est une fille ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir deux filles sachant qu'il y a au moins une fille ?

3.2 Probabilités composées

Dans la pratique, on calcule souvent la probabilité d'une intersection grâce à la connaissance de probabilité(s) conditionnelle(s) (et non l'inverse).
En effet, si A_1 et A_2 sont deux événements, alors $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)$, si $P(A_1) \neq 0$.

Convention : Si $P(A_1) = 0$, la quantité $P(A_1)\,P(A_2|A_1)$ est considérée nulle par convention (même si $P(A_2|A_1)$ n'a pas de sens). La formule $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)$ reste donc vraie sans l'hypothèse sur $P(A_1)$.

Remarque : On peut ici représenter la situation par un arbre pondéré (comme vous aviez l'habitude de le faire en terminale).
La probabilité de $A_1 \cap A_2$ s'obtient en multipliant les probabilités rencontrées sur le chemin qui mène de la racine à la feuille $A_1 \cap A_2$.
Le seul fait d'utiliser un arbre de probabilité ne sera pas considéré comme une justification suffisante pour un calcul de probabilité.



Généralisation à un nombre fini d'événements :

Théorème 3.5 (formule des probabilités composées)

Soit $(\Omega\,, P)$ un espace probabilisé fini et soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements de Ω, avec $n \geqslant 2$.
On suppose que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors :

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1 \cap A_2)\,\cdots\,P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Convention : Si $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) = 0$, le membre de droite est considérée nul par convention. La formule peut donc être énoncée sans l'hypothèse sur $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$.

Exemple 3.6 : Une urne contient initialement 7 boules noires et 3 boules blanches. On tire successivement 3 boules : si on tire une noire, on l'enlève, si on tire une blanche, on la retire, et on ajoute une noire à la place. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche puis deux boules noires ?

3.3 Formule des probabilités totales

Théorème 3.7 (formule des probabilités totales)

Soit $(\Omega\,,P)$ un espace probabilisé fini et soit $(A_1\,,\ldots,A_n)$ un système complet d'événements de Ω.

Pour tout événement B de Ω, on a la formule : $P(B)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}P(A_i\cap B)$.

Si de plus $P(A_i)\neq 0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, cette formule se réécrit $P(B)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\,P(B|A_i)$.

Convention : Si $P(A_i)=0$, la quantité $P(A_i)\,P(B|A_i)$ est considérée nulle par convention.

La formule $P(B)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\,P(B|A_i)$ peut donc être énoncée sans l'hypothèse sur les $P(A_i)$.

Cas particulier : Dans le cas du système complet de deux événements $(A,\overline{A})$, cette formule se réécrit :

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(A)\,P(B|A)+P(\overline{A})\,P(B|\overline{A})$$

Remarque : Dans un arbre pondéré où le premier niveau correspond au système complet d'événements $(A_1\,,\cdots,A_n)$ et où B et $\overline{B}$ apparaissent sur le second niveau, $P(B)$ est obtenu en sommant les probabilités des chemins qui aboutissent à B.
Là encore, la seule utilisation d'un arbre de probabilités ne saurait être une justification suffisante : il faut invoquer la formule des probabilités totales.

Exemple 3.8 : On dispose de deux urnes numérotées 1 et 2.
Pour $i\in\{1\,;2\}$, l'urne numéro i contient une proportion p_i de boules blanches (les autres boules sont noires).
On choisit au hasard l'une des deux urnes, puis on tire une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ? On notera B l'événement : « on tire une boule blanche », et pour $i\in\{1\,;2\}$, on notera U_i l'événement : « on choisit l'urne n°i ».

3.4 Formule de Bayes

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. On cherche à calculer $P(A|B)$ connaissant $P(B|A)$.

1. La définition des probabilités conditionnelles entraîne : $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$.
2. Dans le cas où l'événement A fait partie d'un système complet d'événements $(A_1\,,\ldots,A_n)$ de probabilités non nulles, on obtient en utilisant la formule des probabilités totales (pour $A=A_j$, $j\in[\![1\,;n]\!]$) :
$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

Ces deux formules portent le nom de **formules de Bayes**. Il est préférable de savoir les retrouver plutôt que de les apprendre par cœur.

Exemple 3.9 : On reprend l'exemple précédent. Pour $i\in\{1\,;2\}$, quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne n°i sachant que l'on a tiré une boule blanche ?

4 Événements indépendants

4.1 Indépendance de deux événements

Définition 4.1 (couple d'événements indépendants)

Soit $(\Omega\,,P)$ un espace probabilisé fini.
Deux événements A et B de Ω sont dits indépendants lorsque $P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$.

Attention à ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.

Remarque : L'indépendance de deux événements dépend de la loi de probabilité P considérée sur Ω.

Proposition 4.2 (caractérisation de l'indépendance de deux événements)

Soit $(\Omega\,, P)$ un espace probabilisé fini et soient A et B deux événements de Ω.

1. Si $P(B) = 0$, alors A et B sont indépendants.
2. Si $P(B) \neq 0$, alors A et B sont indépendants si et seulement si $P(A|B) = P(A)$.

Interprétation intuitive : A et B sont indépendants si « le fait que B soit réalisé ou non n'influe pas sur la probabilité que A le soit » (et inversement).

Proposition 4.3 (obtention d'autres événements indépendants grâce aux complémentaires)

Soit $(\Omega\,, P)$ un espace probabilisé fini et soient A et B deux événements de Ω indépendants. Alors :

- A et $\overline{B}$ sont indépendants ;
- $\overline{A}$ et B sont indépendants ;
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

4.2 Indépendance d'un nombre fini d'événements

Définition 4.4 (indépendance deux à deux et indépendance mutuelle)

Soit $(\Omega\,, P)$ un espace probabilisé fini et soit $(A_1\,, \ldots, A_n)$ une famille d'événements de Ω, avec $n \geqslant 2$. On dit que les événements $A_1\,, \ldots, A_n$ sont :

1. indépendants deux à deux lorsque pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, les deux événements A_i et A_j sont indépendants ;
2. mutuellement indépendants (ou plus simplement : indépendants) lorsque pour tout $I \subset [\![1,n]\!]$:

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

Cas particulier : Trois événements A_1, A_2 et A_3 sont mutuellement indépendants si $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$, $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$ et $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

Remarque : L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux.
La réciproque est fausse si $n \geqslant 3$.

Exemple 4.5 : Soit $\Omega = [\![1;4]\!]$ et soit P la probabilité uniforme sur Ω. Soit $A = \{1;2\}$, $B = \{2;3\}$ et $C = \{1;3\}$. Montrer que A, B et C sont indépendants deux à deux mais non mutuellement indépendants.

Proposition 4.6 (obtention d'autres événements indépendants grâce aux complémentaires)

Soit $(\Omega\,, P)$ un espace probabilisé fini et soit $(A_1\,, \ldots, A_n)$ une famille d'événements indépendants de Ω, avec $n \geqslant 2$. Alors $A_1\,, \ldots, A_{n-1}, \overline{A}_n$ sont indépendants.

Remarque : On peut itéré ce résultat (comme dans la Proposition 4.3) afin de montrer que $\overline{A}_1 \ldots, \overline{A}_n$ sont également indépendants.

5 Urnes et tirages

De nombreux exercices portent sur des tirages de boules dans une urne. Nous traitons dans cette partie la manière dont on gère ces problèmes. Il existe trois interprétations possibles, celles-ci dépendent de la modélisation du problème et notamment de la façon dont s'effectue le tirage.

Considérons une urne contenant b boules blanches et n boules noires dans laquelle on tire k boules.
On s'intéresse aux évènements :

$$A : \ll \text{On tire } x \text{ boules blanches et } y \text{ boules noires} \gg$$
$$A' : \ll \text{On tire d'abord } x \text{ boules blanches puis } y \text{ boules noires} \gg$$

On notera B_i (resp. N_i) l'évènement : ≪ la i-ième boule tiré est banche (resp. noire) ≫.

Tirage simultané :
Si le tirage est simultané, l'univers est l'ensemble des tirages simultanés de k boules dans une urne comportant $b+n$ boules. On a équiprobabilité sur ces tirages, par conséquent :

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{b}{x}\binom{n}{y}}{\binom{b+n}{k}}.$$

L'évènement A' n'a ici pas de sens car on ne peut considérer l'ordre dans un tirage simultané.

Tirage sans remise :
Les modèles ≪ tirage simultané ≫ et ≪ tirage sans remise ≫ donnent le même résultat pour $P(A)$, même si les univers associés sont différents.
Pour $P(A')$, on utilise alors du conditionnement et notamment la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(A') = P(B_1 \cap \cdots \cap B_x \cap N_{x+1} \cap \cdots \cap N_{x+y}) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2)\cdots P_{B_1\cap\cdots\cap N_{x+y-1}}(N_{x+y}) \\ &= \frac{b}{b+n} \times \frac{b-1}{b+n-1} \times \cdots \times \frac{n-y-1}{b+n-k-1} \end{aligned}$$

Tirage avec remise :
Si le tirage est avec remise, alors les tirages sont indépendants, d'où :

$$P(A') = P(B_1 \cap \cdots \cap B_x \cap N_{x+1} \cap \cdots \cap N_{x+y}) = P(B_1)^x P(N_{x+1})^y = \left(\frac{b}{b+n}\right)^x \left(\frac{n}{b+n}\right)^y$$

Pour le calcul de $P(A)$, on peut écrire $A = \bigcup\limits_{\substack{I \subset [\![1;k]\!] \\ |I|=x}} A_I$ où $A_I = \left(\bigcap\limits_{i \in I} B_i\right) \cap \left(\bigcap\limits_{i \in [\![1;k]\!] \setminus I} N_i\right)$.
Comme les tirages sont indépendants, on a $P(A_I) = \left(\frac{b}{b+n}\right)^x \left(\frac{n}{b+n}\right)^y$.
Les événements A_I étant incompatibles deux à deux, on a donc, par additivité de P :

$$P(A) = \sum_{\substack{I \subset [\![1;k]\!] \\ |I|=x}} P(A_I) = \binom{k}{x} \left(\frac{b}{b+n}\right)^x \left(\frac{n}{b+n}\right)^y$$

Exemple 5.1 : On dispose d'une urne contenant 4 boules blanches et 3 boules noires.
On tire 3 boules dans cette urne.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche et deux boules noires si le tirage est :
   (a) simultané ;
   (b) avec remise.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche puis deux boules noires si le tirage est :
   (a) sans remise ;
   (b) avec remise.